Compléments autour de la Leçon 29 (ex 33)

1 Autour de la bonne définition d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1

Donner un exemple de fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$, continue sur I telle que pour toute condition initiale $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne soit pas bien définie.

Exercice 2

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation récurrente d'ordre 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Supposons qu'il existe un sous-ensemble J de I stable par f, c'est-à-dire tel que $f(J) \subset J$. Montrer que pour toute condition initiale $u_0 \in J$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et vérifie $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset J$.
2. Est-il nécessaire que f soit continue sur I pour que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bien définie ?
3. Que pensez-vous du cas où $I = \mathbf{R}$?

2 Autour des variations

Exercice 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $I \subset \mathbf{R}$ stable par f. Soit aussi $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence d'ordre 1 $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Supposons que f soit croissante sur I. Caractériser la monotonie $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction du signe de $f(u_0) - u_0$.
2. Supposons que f soit décroissante sur I. Montrer que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones, l'une croissante, l'autre décroissante.
3. Donner une condition suffisante sur f pour que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit croissante pour toute condition initiale $u_0 \in I$.

3 Autour du comportement asymptotique

Exercice 4

Donner un exemple de fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, telle que selon la condition initiale choisie la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit convergente ou admette deux valeurs d'adhérence distinctes.

Exercice 5

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $[a, b]$ soit stable par f. Soit aussi $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence d'ordre 1 $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $l \in \mathbf{R}$ alors l est nécessairement un point fixe de f et appartient à $[a, b]$.

Exercice 6

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ admettant un point fixe dans $[a, b]$ et contractante, c'est-à-dire $k-$lipshitzienne pour un $k \in]0, 1[$. Soit aussi $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence d'ordre 1 $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Montrer que f admet un unique point fixe l.
3. Montrer que, pour toute condition initiale $u_0 \in [a, b]$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l et donner un majorant de $|u_n - l|$ en fonction de a, b, k et n.

Exercice 7

Soient $a > 0$, f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite récurrente d'ordre 1 définie par la donnée de $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Cette suite correspond au procédé connu sous le nom de *méthode de Héron* pour l'approximation de $\sqrt{a}$.

1. Montrer que $\mathbf{R}_+^*$ est stable par f.
2. Montrer que f admet $\sqrt{a}$ pour unique point fixe dans $\mathbf{R}_+^*$.
3. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si $u_0 = \sqrt{a}$?
4. Montrer que si $u_0 \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{\sqrt{a}\}$ alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > \sqrt{a}$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.
6. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\sqrt{a}$.
7. Proposer une autre suite récurrente d'ordre 1 (issue d'une méthode classique) permettant de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{a}$.

4 Suites arithmético-géométriques

Exercice 8

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Considérons la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbf{R}$ et l'expression récurrente :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. À l'étude de quel type de suites se ramène le cas particulier $a = 1$?
2. À l'étude de quel type de suites se ramène le cas particulier $b = 0$?
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le cas particulier $a = 0$?
4. On suppose pour la suite de cet exercice que $a \neq 1$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax+b$ admet un unique point fixe α.
5. Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \in \mathbf{N}$.
6. En déduire une expression close pour u_n puis pour $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
7. Discuter du comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de a.

5 Suites homographiques dans C

Exercice 9

Soient $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Considérons la suite homographique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbf{C}$ et l'expression récurrente :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

1. À l'étude de quel type de suites se ramène le cas particulier $c = 0$?
2. Supposons maintenant que $c \neq 0$ et définissons $f : \mathbf{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbf{C}$ par :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle bien définie dans tous les cas ?
   (b) On suppose pour la suite de cet exercice que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.
      i. Montrer que f admet soit un soit deux points fixes dans $\mathbf{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
      ii. Montrer que f est injective.
      iii. Montrer que si $z \in \mathbf{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ alors $f(z)$ n'est pas un point fixe de f non plus.
      iv. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si u_0 est un point fixe de f ?
   (c) On suppose que f admet un unique point fixe α et β et que $u_0 \in \mathbf{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}, \alpha\right\}$.

i. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}\setminus\{\alpha\}$.

ii. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}, \quad n\in\mathbf{N},$$

est arithmétique et préciser sa raison.

(d) On suppose maintenant que f admet deux points fixes α et β et que $u_0 \in \mathbf{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c},\alpha,\beta\right\}$.

i. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}\setminus\{\alpha,\beta\}$.

ii. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}, \quad n\in\mathbf{N},$$

est géométrique et préciser sa raison.

6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et suite de Fibonacci

Exercice 10

On considère les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire les suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par la donnée de $(u_0,u_1)\in\mathbf{R}^2$ et pour $(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$ la relation :

$$u_{n+2} = a_1u_{n+1} + a_2u_n, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Pour $n\in\mathbf{N}$, on note :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfait une expression récurrente linéaire matricielle d'ordre 1 $U_{n+1} = AU_n$ et expliciter la matrice A.
2. En déduire une relation close pour U_n en fonction de U_0 et A.
3. Rappeler une condition suffisante pour que A soit diagonalisable.
4. On considère maintenant le cas particulier $a_1 = a_2 = 1$ et $(u_0,u_1) = (0,1)$ correspondant à la suite de Fibonacci.
   (a) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A dans ce cas.
   (b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Déduire de ce qui précède la *formule de Binet* affirmant que pour tout $n\in\mathbf{N}$ le terme d'ordre n de la suite de Fibonacci est donné par :
   $$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

7 Exercice de bac Terminale Spécialité (Polynésie 2022 sujet 1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

1. (a) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
   (b) Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = ...
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = ...
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la valeur de sa limite.
5. (a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
   (b) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.